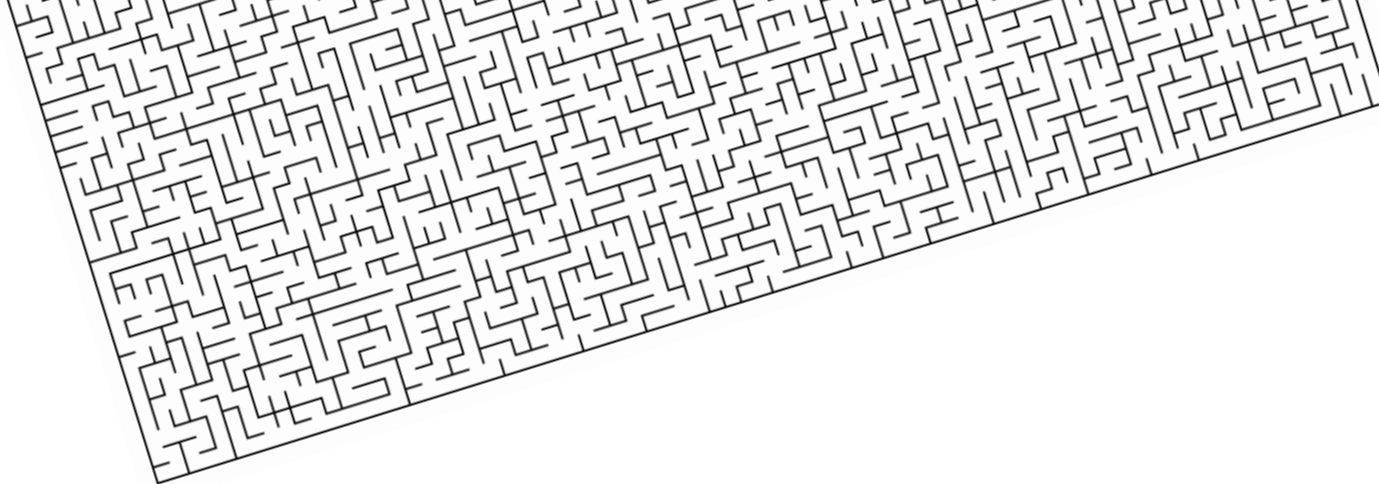
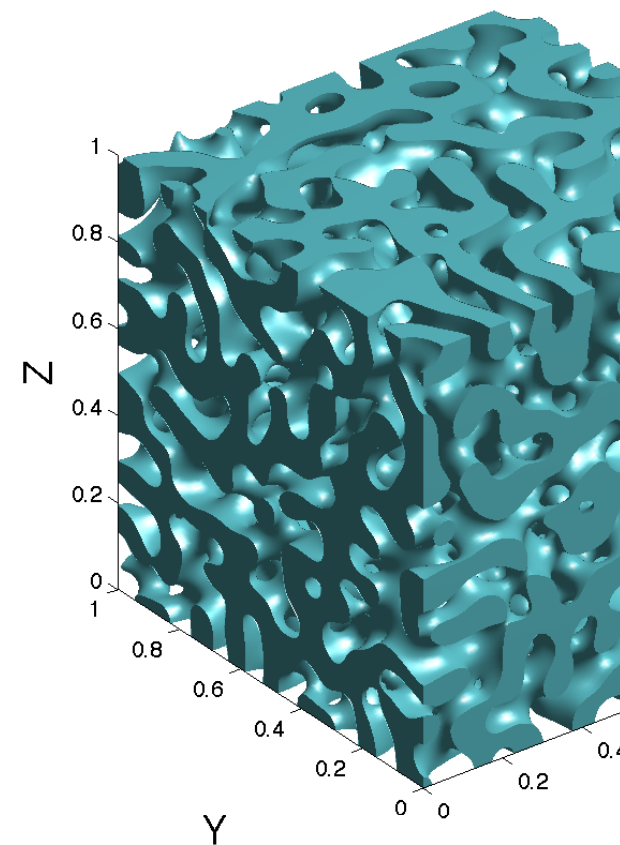
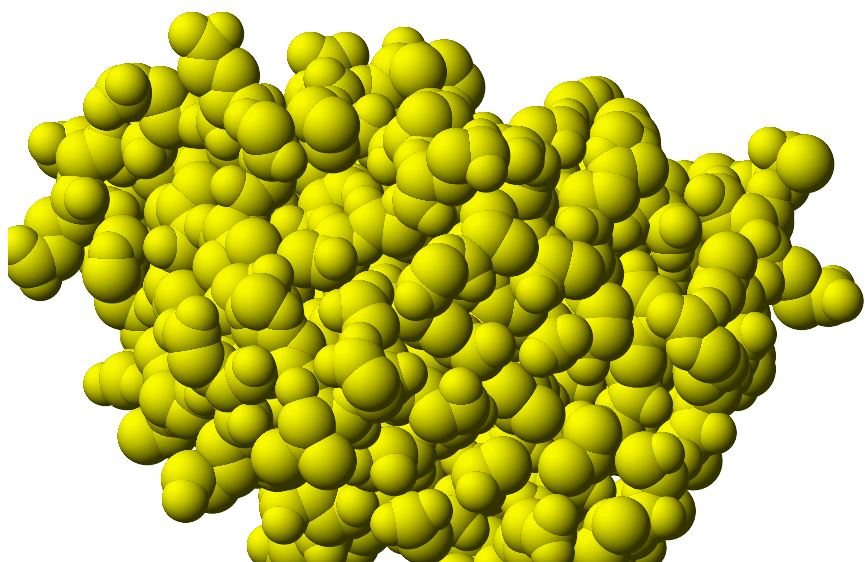




柔らかいトポロジーの穴から眺める世界

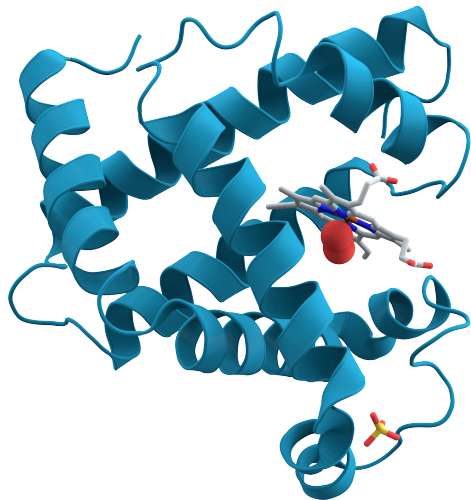
平岡裕章（九州大学）



講演内容

1. トポロジーと穴
2. 穴を定義する
3. 応用してみよう

タンパク質



ガラス



センサーネットワーク

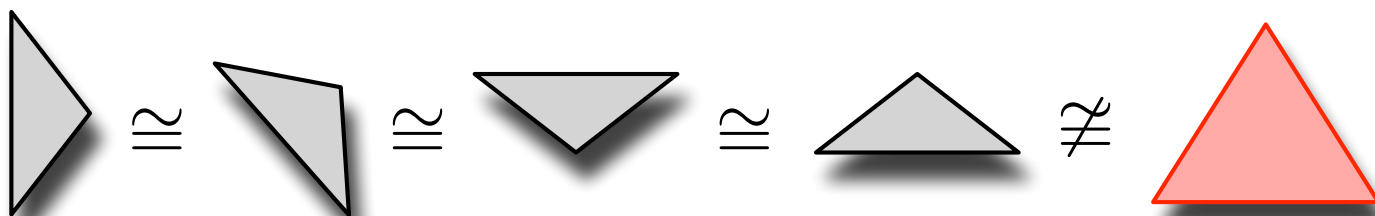


1. トポロジーと穴

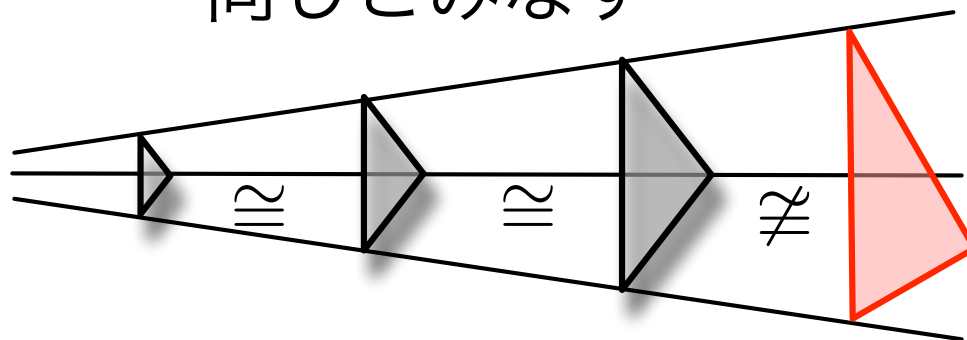
幾何学：ものの形を研究する数学の分野

図形の分類の仕方は基準の定め方によって様々

★ 基準「合同」：図形が重なり合うときは同じとみなす

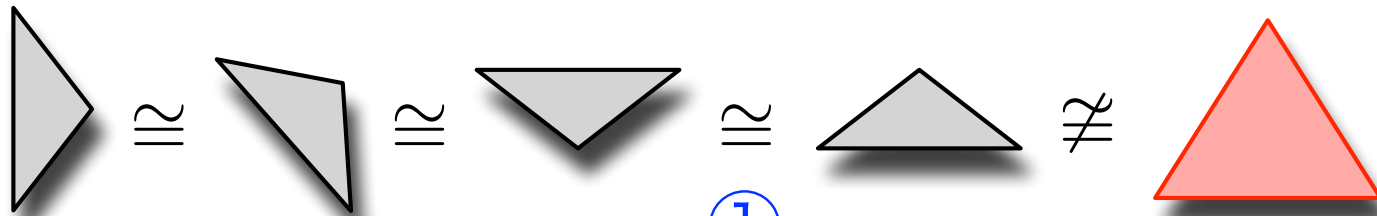


★ 基準「相似」：スケールをかえて重なり合う図形は同じとみなす



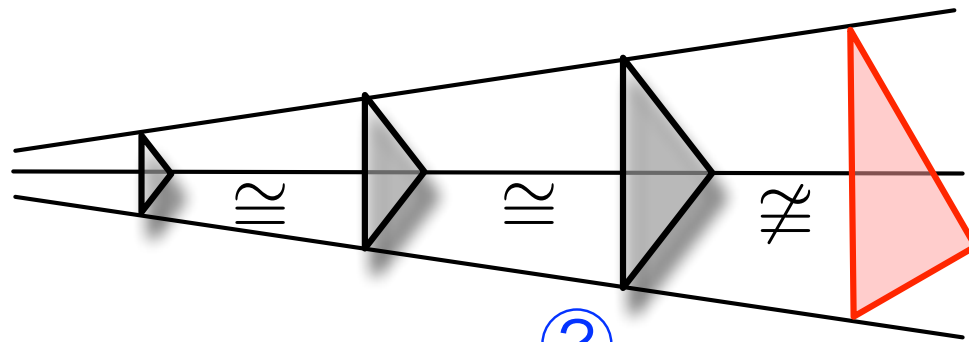
代数的（定量的）には, , ,

★ 合同：図形が重なり合うときは同じとみなす



①
↔ 3 辺の長さが同じ 3 三角形は同じと見なす

★ 相似：スケールをかえて重なり合う図形は同じとみなす



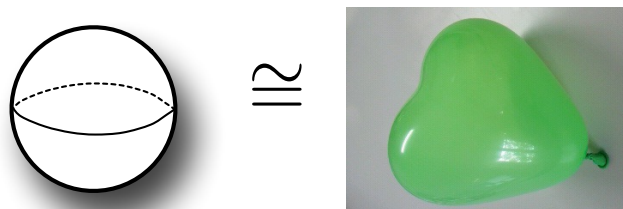
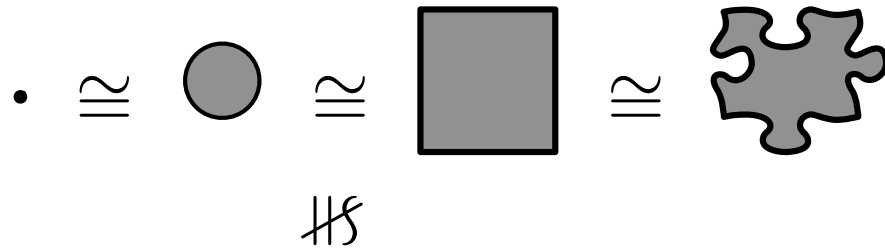
②
↔ 2 組の角が同じ 3 三角形は同じと見なす

- ①や②は代数的不変量とよばれるものの例
- それぞれの代数的不変量を調べることで図形の分類が可能

トポロジー：幾何学の1分野でその基準は

「切り貼りせずに連続的に変形させて重なり合う
図形は同じもの」

で与えられます



トポロジー = 切り貼りしない連続変形はOK！

疑問：何でもありって感じの世界だけど，そんな世界で不変な量ってあるの？

	連結成分	わっか	空洞
$\bullet \cong \bigcirc \cong \square \cong \text{ジグソーパズル}$	1	0	0
$\bullet \bullet \cong \triangle \star$	2	0	0
$\square \cong \text{複雑な輪郭} \cong \text{マグカップ}$	1	1	0
$\text{球} \cong \text{梨}$	1	0	1

連結成分， わっか， 空洞の数は**不変量**だ！

★ 連結成分, わっか, 空洞 : **もののつながり方**を表す量

- 0次元の「**穴**」 : 連結成分
- 1次元の「**穴**」 : わっか
- 2次元の「**穴**」 : 空洞



トポロジー : 各次元の「**穴**」を不変にする変形で
重なり合う図形は同じと見なす

★ 不満 : あまりにも「**穴**」の定義があいまいだ、
正確な定義 = 代数化

→ **ホモロジー群**

★ ホモロジー群とは

幾何学的対象 X に対して

$$H_0(X) = \mathbf{R}^{k_0}$$

k_0 : 連結成分の数

$$H_1(X) = \mathbf{R}^{k_1}$$

k_1 : わっかの数

$$H_2(X) = \mathbf{R}^{k_2}$$

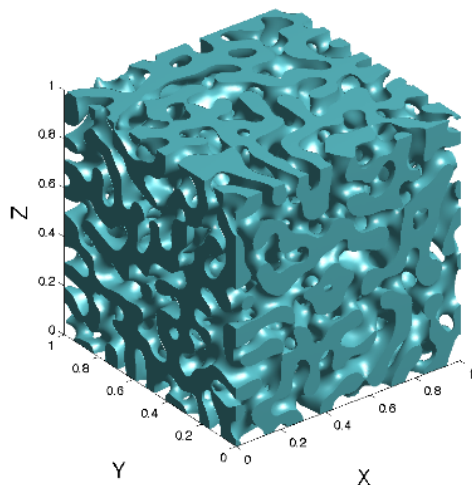
k_2 : 空洞の数

⋮

$$H_q(X) = \mathbf{R}^{k_q}$$

k_q : q 次元の「穴」の数

を表す, 代数的な道具 (現代数学に必須!)



$$H_0(\text{cube}) = \mathbf{R}$$

$$H_1(\text{cube}) = \mathbf{R}^{847}$$

$$H_2(\text{cube}) = 0$$



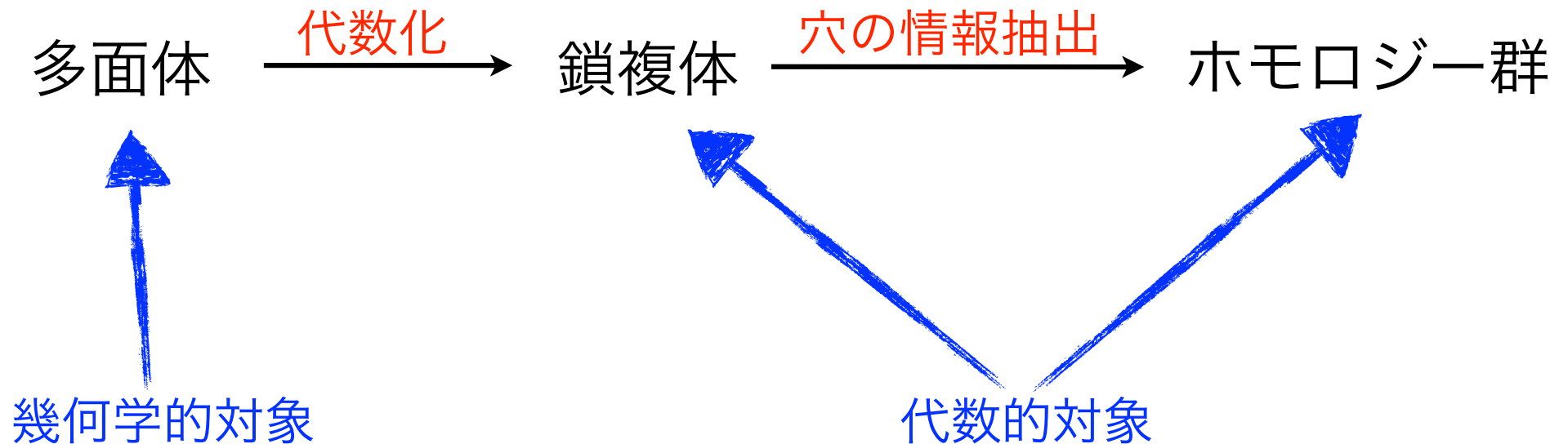
$$H_0(\text{西浦先生}) = \mathbf{R}^{10}$$

$$H_1(\text{西浦先生}) = \mathbf{R}^{36}$$

2. 穴を定義する

「連結成分, わっか, 空洞」を表すホモロジー群を
代数的に定義してみよう

★ ホモロジー群の導入の流れ



多面体（単体複体）

多面体：頂点，辺，三角形，…，高次元の三角形を
（ズレが無いように）張り合わせた図形



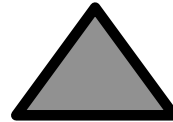
頂点

(0次元)



辺

(1次元)



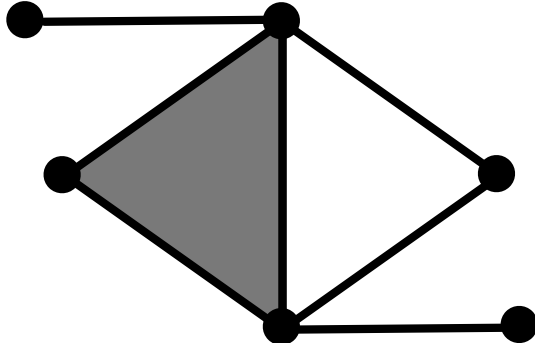
三角形

(2次元)

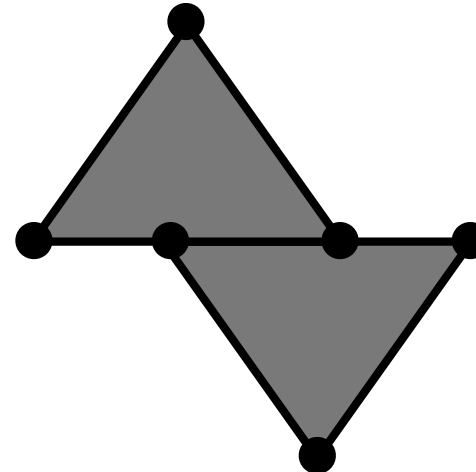


四面体

(3次元)

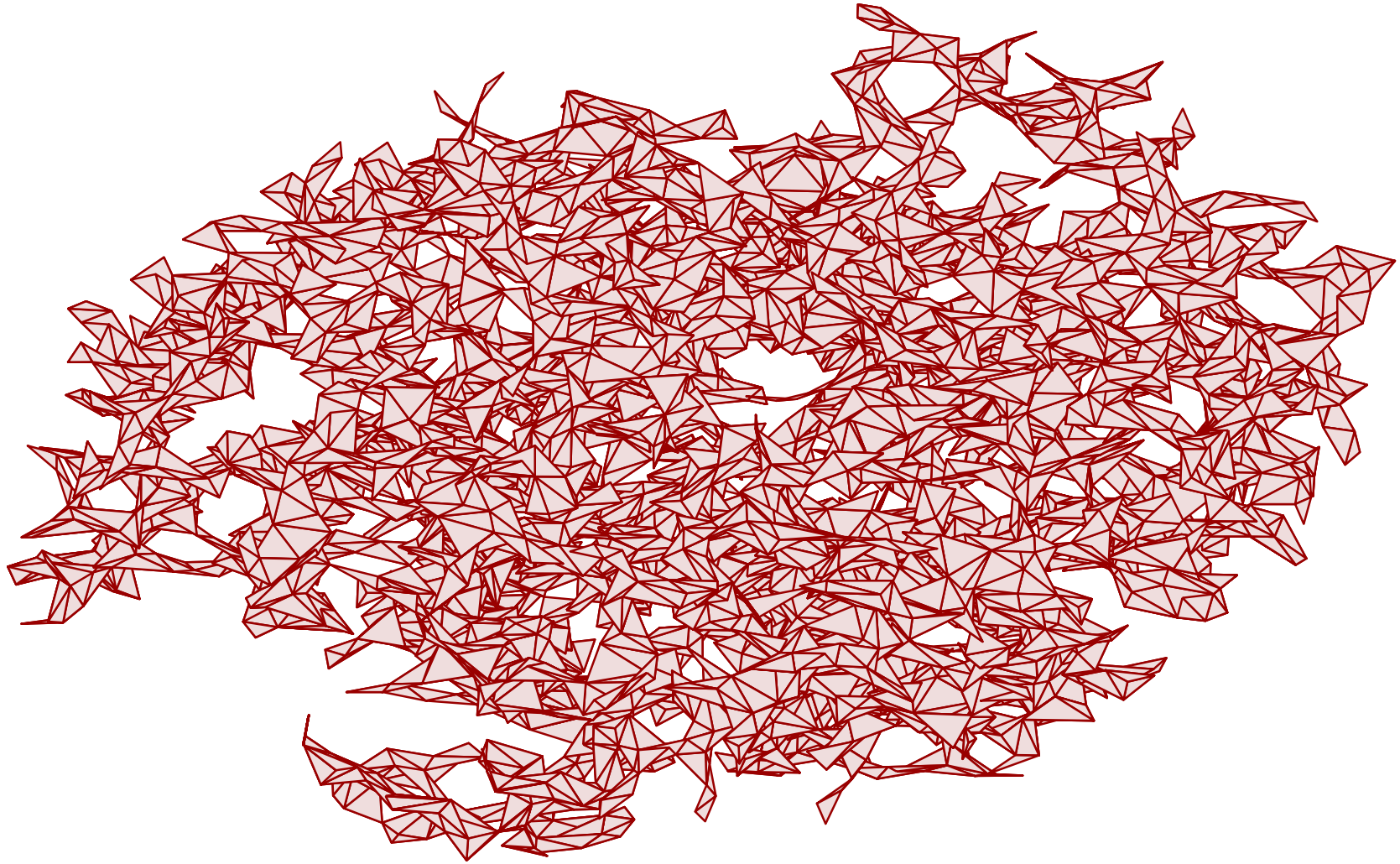


多面体の例



多面体ではない例

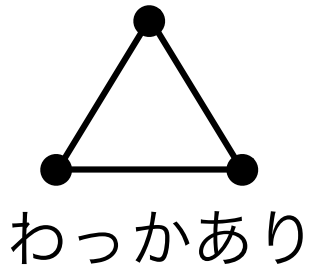
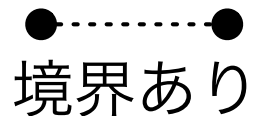
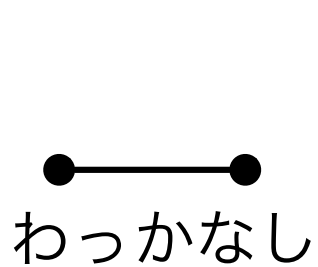
多面体の例



ヘモグロビンの多面体モデル

穴って何だ？

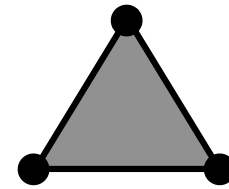
★ 1次元の穴：わっか



境界なし

1次元図形は境界がなければ「わっか」？

そうでもない



1次元図形  には境界がないが
2次元図形  の境界になっているので
わっかが消失！

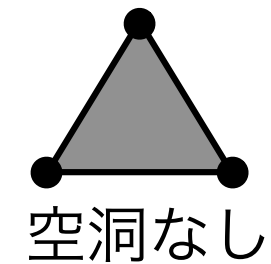
1次元の穴（わっか）の特徴付け



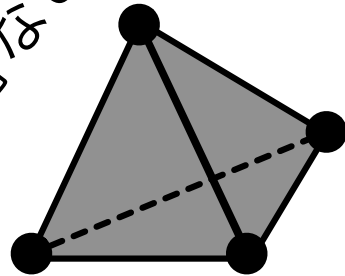
境界のない1次元図形で2次元図形の境界になっているもの

穴って何だ？

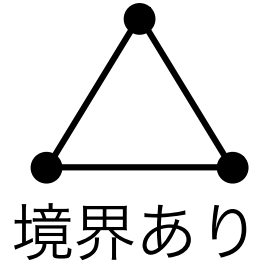
★ 2次元の穴：空洞



中身なし



空洞あり

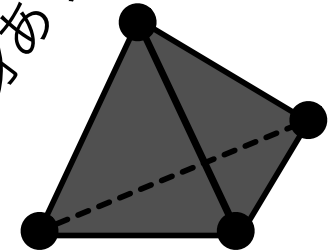


境界なし

2次元図形は境界がなければ「空洞」？

そうでもない

中身あり



空洞なし

2次元図形には境界がないが
3次元図形の境界になっているので
空洞が消失！

2次元の穴（空洞）の特徴付け



境界のない2次元図形で3次元図形の境界になっているもの

穴と境界

1次元の穴（わっか）の特徴付け



境界のない1次元図形で2次元図形の境界になっているもの

2次元の穴（空洞）の特徴付け



境界のない2次元図形で3次元図形の境界になっているもの

KEYWORD：境界

ホモロジー群のこころ

境界に着目した定式化を行うことで穴を代数化する

目標：境界を代数的に取り出そう！

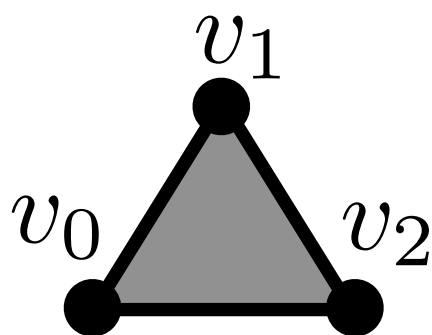
K ：多面体, $\mathbf{Z}_2 := \{0, 1\}$ ($0 + 0 = 1 + 1 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$)

定義：鎖群 (さぐん)

$$C_0(K) = \left\{ \sum \alpha_i \underbrace{|v_i|}_{\text{Kの頂点}} ; \alpha_i \in \mathbf{Z}_2 \right\}$$

$$C_1(K) = \left\{ \sum \alpha_{ij} \underbrace{|v_i v_j|}_{\text{Kの辺}} ; \alpha_{ij} \in \mathbf{Z}_2 \right\}$$

$$C_2(K) = \left\{ \sum \alpha_{ijk} \underbrace{|v_i v_j v_k|}_{\text{Kの三角形}} ; \alpha_{ijk} \in \mathbf{Z}_2 \right\}$$



$$C_0(K) = \{a|v_0| + b|v_1| + c|v_2|\}$$

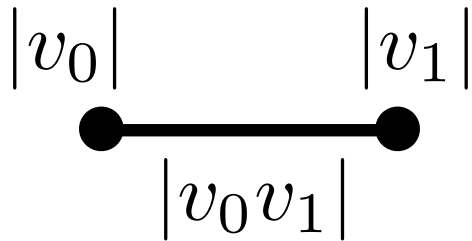
$$C_1(K) = \{a|v_0 v_1| + b|v_1 v_2| + c|v_0 v_2|\}$$

$$C_2(K) = \{a|v_0 v_1 v_2|\}$$

境界作用素

辺の境界：

$|v_0v_1|$ の境界は $|v_0|, |v_1|$

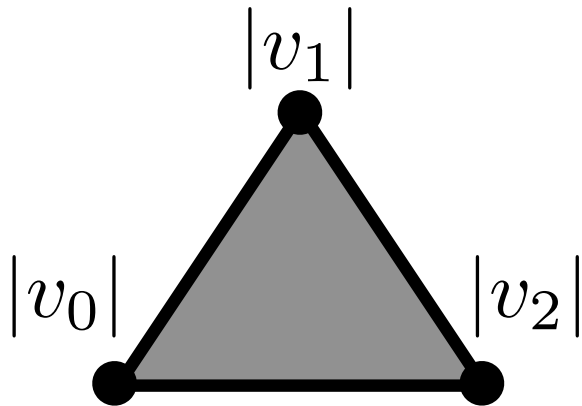


T を境界を取り出す操作として

$T|v_0v_1| := |v_0| + |v_1|$ と書くことにする

三角形の境界：

$|v_0v_1v_2|$ の境界は $|v_0v_1|, |v_1v_2|, |v_0v_2|$

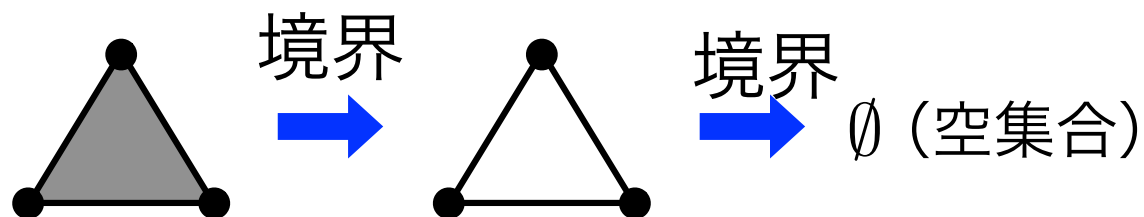


同様に境界を取り出す操作を

$T|v_0v_1v_2| := |v_0v_1| + |v_1v_2| + |v_0v_2|$
と書く

T を境界作用素と呼ぶ

境界の特徴の1つ：境界の境界は無い（空集合）



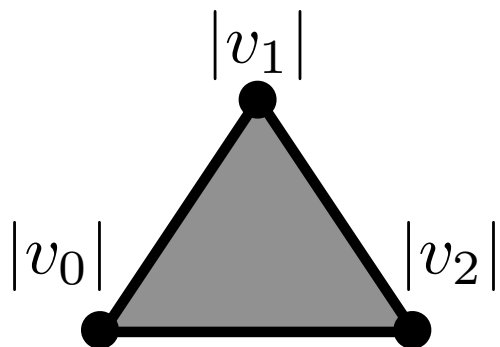
境界作用素は同様の性質を保っている？

命題： $T \circ T = 0$ （続けて境界をとる作用をすれば零になる）

$$C_2(K) \xrightarrow{T} C_1(K) \xrightarrow{T} C_0(K)$$

注意）代数的に「境界の境界は無い」を表現している

ざっと確認：



$$\begin{aligned} T(T|v_0v_1v_2|) &= T(|v_0v_1| + |v_1v_2| + |v_0v_2|) \\ &= T|v_0v_1| + T|v_1v_2| + T|v_0v_2| \\ &= |v_0| + |v_1| + |v_1| + |v_2| + |v_0| + |v_2| \\ &= 0 \quad (1 + 1 = 0 \text{ なので}) \blacksquare \end{aligned}$$

穴を代数的にとりだしてみよう

思い出そう！

1 次元の「穴」 (わっか)



境界のない 1 次元図形で 2 次元図形の境界に
なっていないもの ① ②

①を代数的に表すと

$$Z_1(K) := \{Tc = 0 \text{ となる } c \in C_1(K)\}$$

②を代数的に表すと

$$B_1(K) := \{c = Tc' \text{ と書ける } c \in C_1(K)\}$$

ここで $c' \in C_2(K)$

ちなみに命題 $T \circ T = 0$ より $B_1(K) \subset Z_1(K) \subset C_1(K)$

1 次元の「穴」 (わっか)



境界のない 1 次元図形で 2 次元図形の境界に
なっていないもの

よって 1次元の「穴」を代数的に表現すると

「 $Z_1(K)$ に対して $B_1(K)$ を **零にする操作で生き残るもの**」
(操作を Q と表す)

すると $z = z' + b$, $z, z' \in Z_1(K)$, $b \in B_1(K)$ に対して

$$Q(z') = Q(z) + Q(b) = Q(z)$$

$Z_1(K)$ の中で違いが $B_1(K)$ である要素ごとにグループ分けした各グループが 1 次元の「穴」を表現することになる

定義：ホモロジー群

$$\begin{aligned} H_1(K) &:= Q(Z_1(K)) = Z_1(K)/B_1(K) \\ &= \{[z] \mid z \in Z_1(K)\} \end{aligned}$$

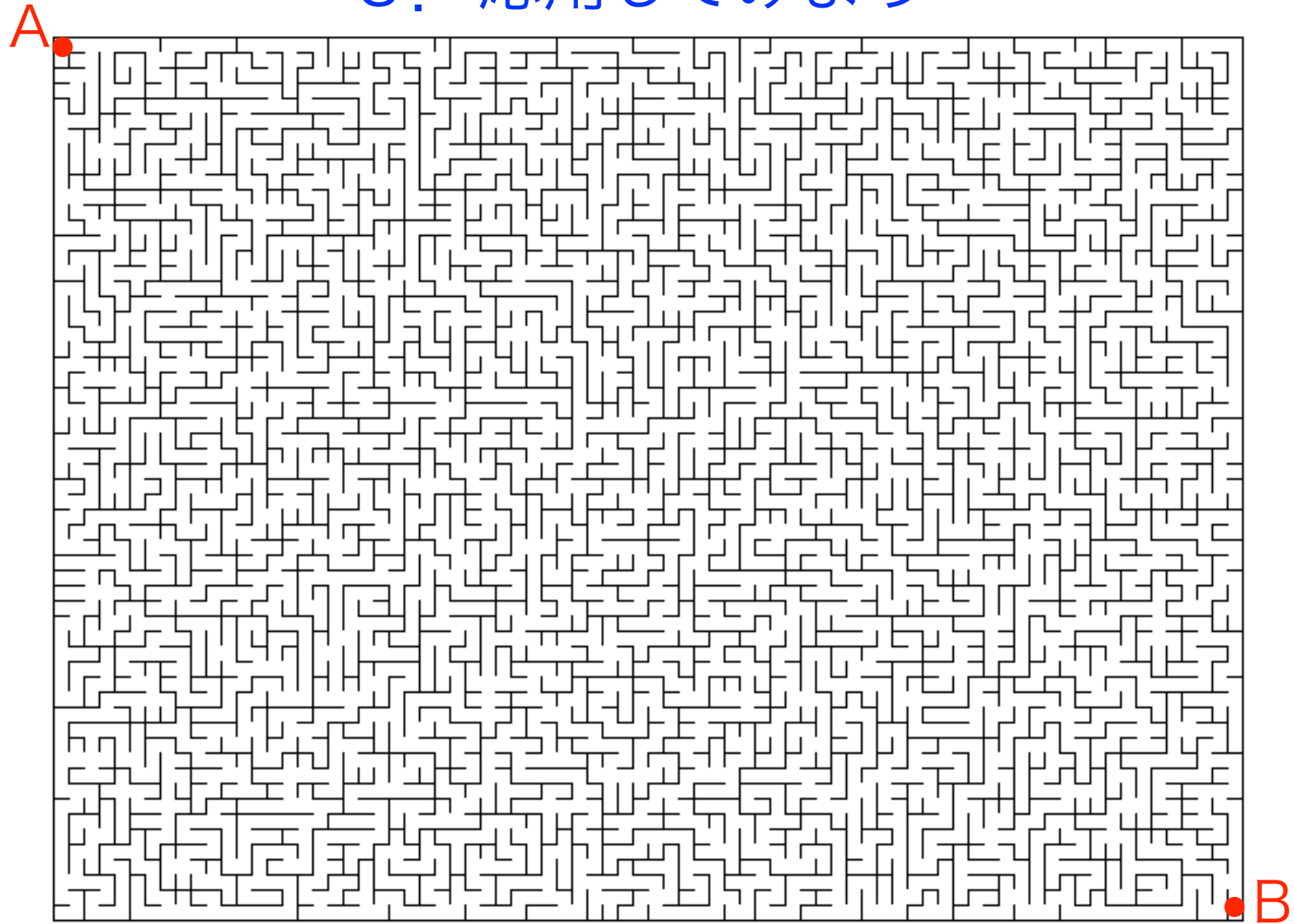
ここで $[z]$ は z が所属するグループを表す
を **1次元ホモロジー群** とよぶ

宿題) 具体的な図形に対して自分でホモロジー群を
求めてみましょう

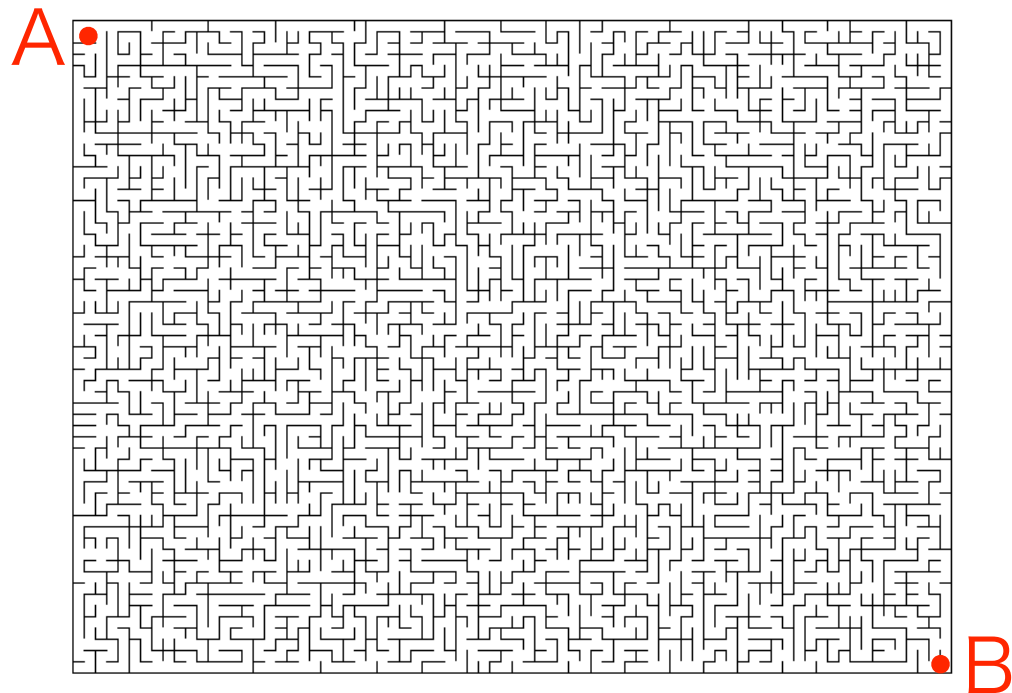
宿題) 2次以上の定義も考えてみましょう (同様です)

宿題) 穴の柔らかさは実は $B_q(K)$ が表します. なぜだか
考えてみましょう

3. 応用してみよう



問題：AからBまでの経路は存在するか調べよ。
存在する場合は何本経路が存在するかも答えよ。

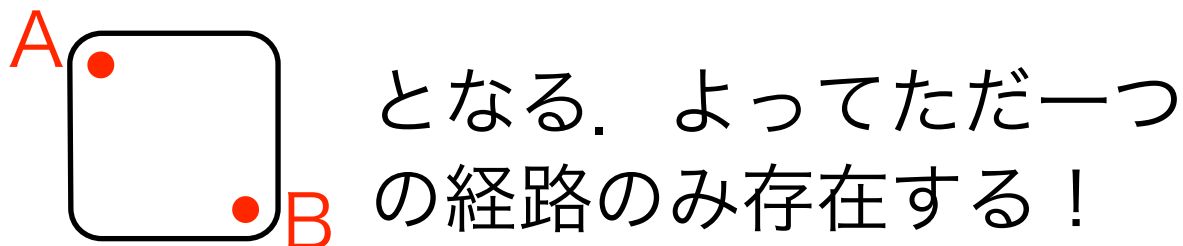


迷路 X のホモロジー群を調べてみると

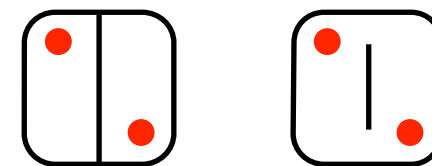
$$H_0(X) = \mathbf{R}^1 : \text{連結成分の個数は1つ}$$

$$H_1(X) = \mathbf{R}^1 : \text{ループの個数は1つ}$$

つまり切り貼りしない連続変形で迷路は

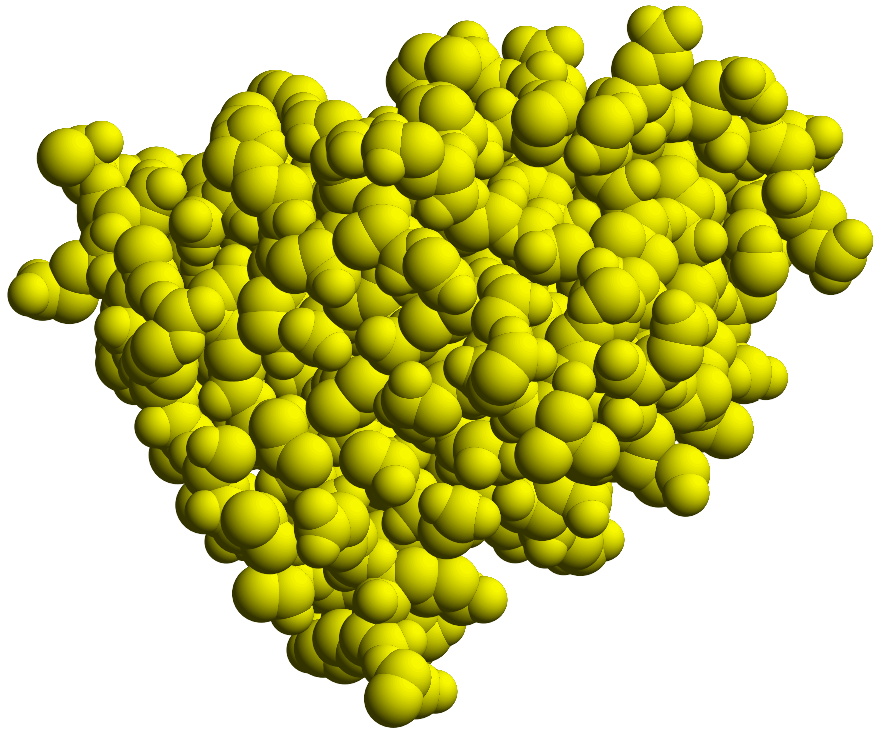


となる. よってただ一つの経路のみ存在する!



となっていない

生命科学への応用（タンパク質）



ジヒドロ葉酸還元酵素
（タンパク質の一つ）

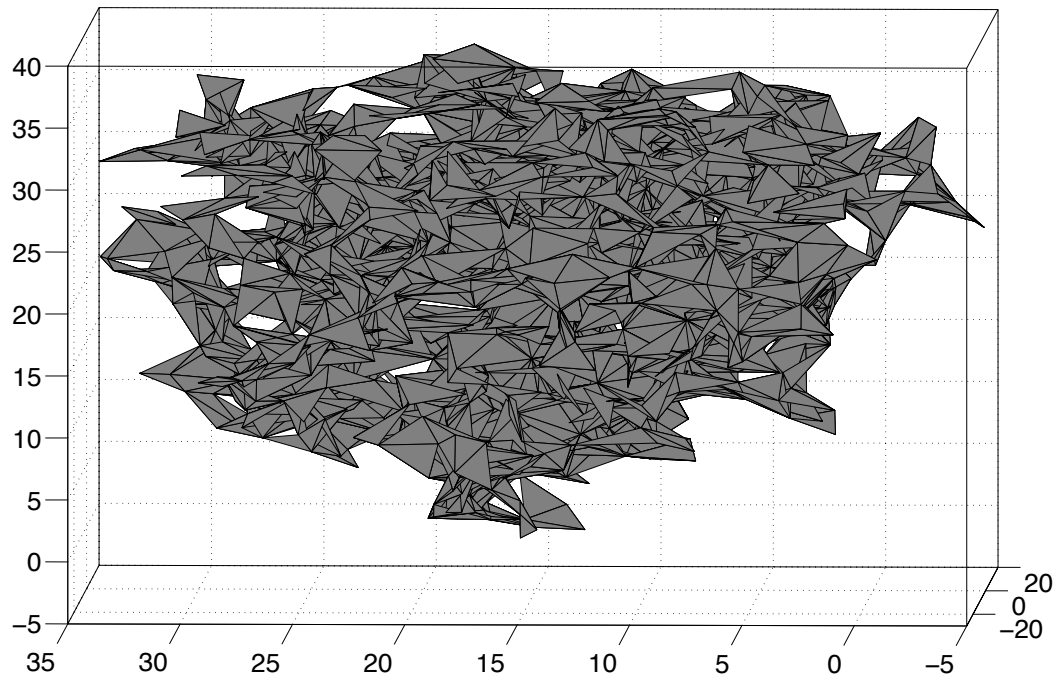
化学者：タンパク質の柔らかか
（泉俊輔さん）さって内部の空洞と
関係あるんだけど実
験じゃ求めにくいん
だ。空洞を調べる方
法知らない？

私：ホモロジー群いってみよー！

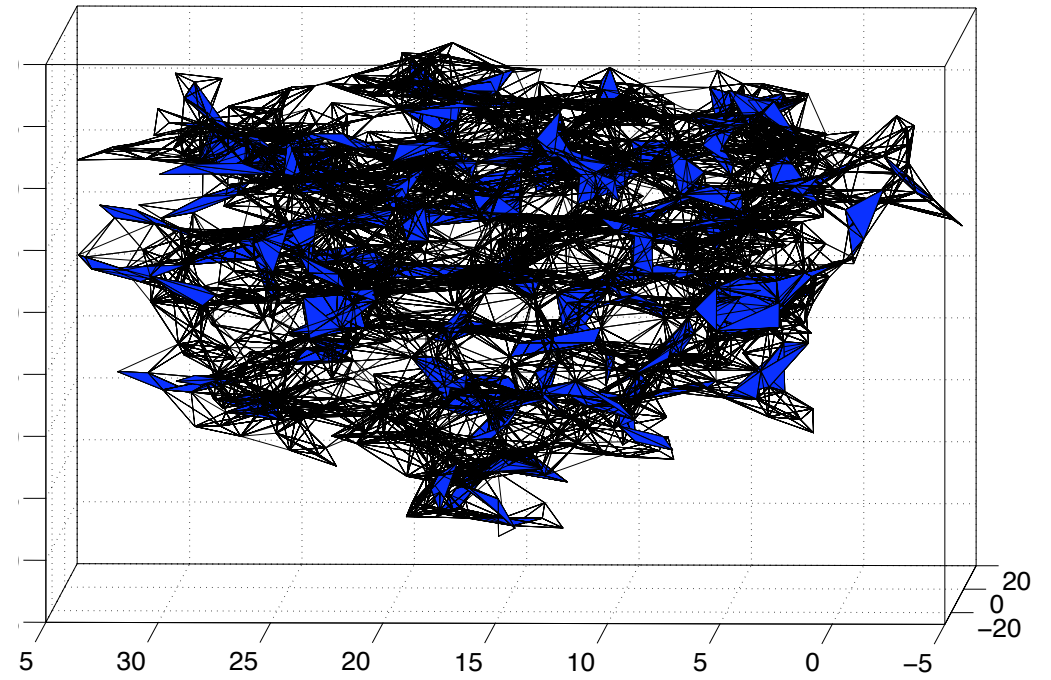
化学者：なんだかかるいなあ。
それって難しくない？

私：簡単ですよ。このとおり、、

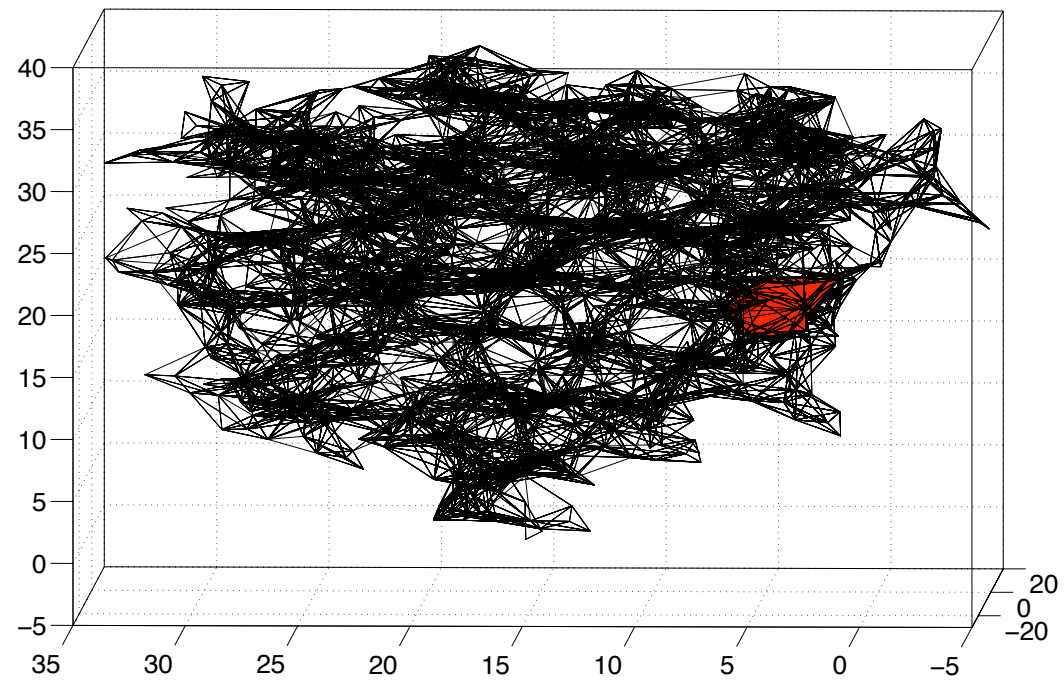
beta lactoglobulin



beta lactoglobulin

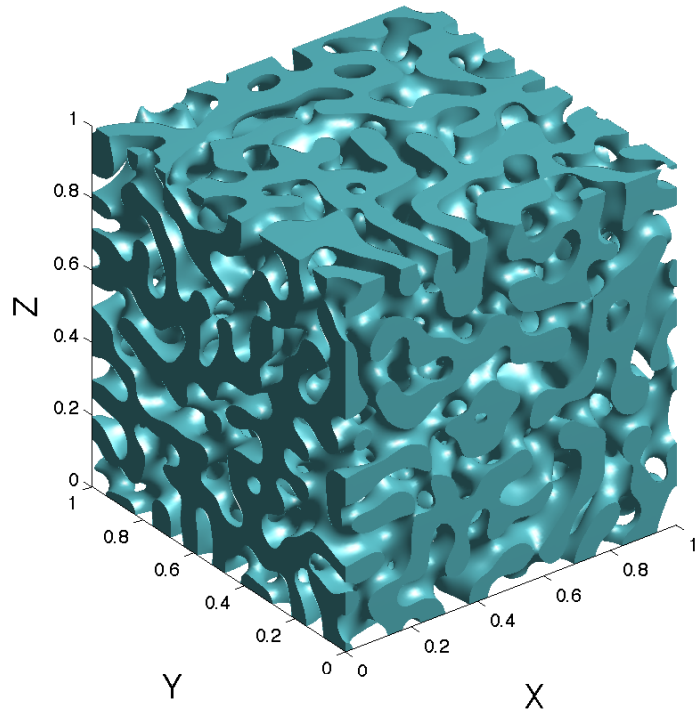


beta lactoglobulin



画像解析

材料内部の構造解析

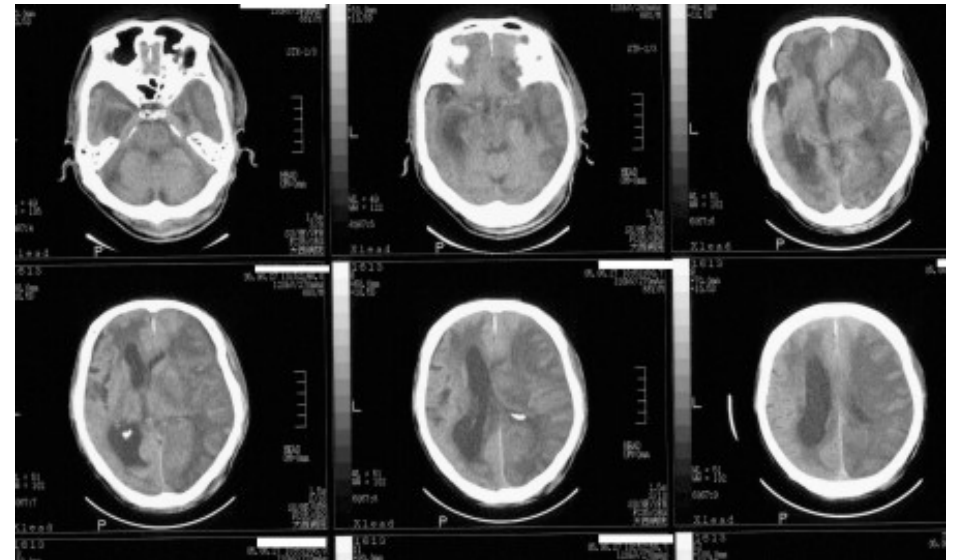


$$H_0(\text{cube}) = \mathbf{R}$$

$$H_1(\text{cube}) = \mathbf{R}^{847}$$

$$H_2(\text{cube}) = 0$$

3次元CTスキャン解析



高次元データの全ての「穴」
の検出が可能